FONCTIONS

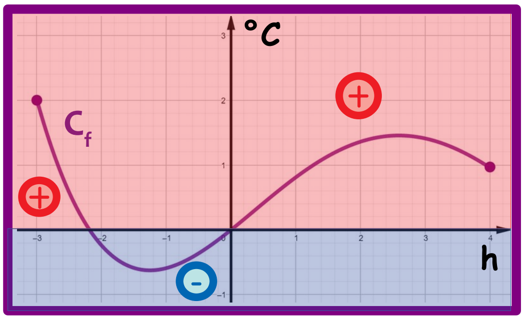
Chapitre 3 : Signe d'une fonction

I. Signe d'une fonction par lecture graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et C_f sa courbe dans un repère.

- Si C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur I, on dit que f est **positive sur I**.
- Si C_f est en-dessous de l'axe des abscisses sur I, on dit que f est **négative sur I.**

Un **tableau de signe** résume le signe d'une fonction :



x	
$f(x)$	

Pour le construire, on peut s'aider des **températures**.

f est négative sur l'intervalle

f est positive sur l'intervalle

II. Signe d'une fonction affine

Rappels : Une fonction affine est définie sur $\mathbb{R}$, elle est de la forme : $f(x)=mx+p$ et graphiquement, c'est une droite.

Méthode : Dresser le tableau de signes d'une fonction affine f

→ Si $m\neq 0$:

1. On cherche la racine de f (c'est-à-dire qu'on résout l'équation $f(x)=0$).
2. On utilise le théorème des variations d'une fonction affine pour dessiner l'allure générale de celle-ci qui nous permet facilement de déduire le signe de f visuellement.

→ Si m = 0 : le signe de f est évident, c'est celui de p.

Exemples : Soient les fonctions affines $f(x)=-7x+28$ et $g(x)=8$.

On résout : $f(x)=0$

$-7x+28=0$

$-7x=-28$

$\frac{-7x}{-7}=\frac{-28}{-7}$

$x=4$

8 est positif donc $g(x)>0$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	+

Puis on complète le tableau de signes à l'aide de l'allure générale de la fonction :

x	$-\infty$ $+\infty$
$f(x)$	

car m < 0 (m = -7) :

III. Signe du produit de fonctions affines

Pour étudier le signe du produit de deux fonctions affines, on combine les signes des deux fonctions dans un seul grand tableau de signes en remarquant que :

- deux nombres de même signe multipliés entre eux donne un nombre positif.
- deux nombres de signes contraires multipliés entre eux donne un nombre négatif.

Exemples :

Méthode : Dresser le tableau de signe du produit de deux fonctions affines

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=(-x+5)(4x-8)$.
Cherchons par exemple à résoudre l'inéquation $f(x)>0$

1. On cherche la racine du 1er facteur puis celle du 2nd facteur.
2. On complète un tableau de signes commun aux deux fonctions affines, en prenant garde de bien placer toutes les racines dans l'ordre croissant.
3. On le prolonge pour déduire le signe de la fonction f avec la règle des signes.
4. On résout l'inéquation demandée.

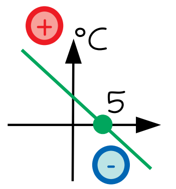
1.

2.

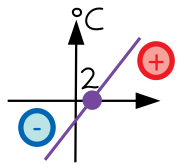
x	$-\infty$ $+\infty$
$-x+5$	
$4x-8$	
$f(x)$	

3.

car :



car :



4. On peut désormais savoir quand cette fonction est strictement positive :
Les solutions sont toujours lues sur la ligne des « x ».

Remarque : Cette méthode marche aussi pour le produit de 3 fonctions affines, 4, etc.

Tu te poses peut-être la question : « Mais pourquoi des traits verticaux ? »
Et bien cela est une aide à la construction : ce procédé permet de créer des colonnes qui t'aident à compléter comme il faut les premières lignes afin de lire facilement la dernière.
Mais attention, il ne faut pas toujours mettre des zéros dessus !

IV. Signe du quotient de deux fonctions affines

Pour étudier le signe d'un quotient de deux fonctions affines, on répète le même procédé qu'au III. mais en se méfiant de la valeur interdite : la valeur qui annule le dénominateur ! Car il est interdit de diviser par zéro. On l'indiquera dans le tableau par une double barre.

Méthode : Dresser le tableau de signe d'un quotient de deux fonctions affines + "zoom"

Soit h la fonction définie par : $h(x)=\frac{x}{6x-13}$.

Dressons son tableau de signe sur $[2;10]$.

1. On étudie le signe du numérateur puis du dénominateur.
2. On complète un tableau de signe commun aux deux fonctions affines, sans se soucier de l'intervalle demandé (sur] -∞ ; +∞ [donc).
3. On le prolonge pour déduire le signe de la fonction h , en ajoutant la valeur interdite.
4. On encadre le résultat attendu en ajoutant les bornes de l'intervalle demandé **ou** en reconstruisant le tableau de signe demandé.

Dénominateur

$6x-13=0$

$6x=13$

$\frac{6x}{6}=\frac{13}{6}$

$x=\frac{13}{6}$

Numérateur

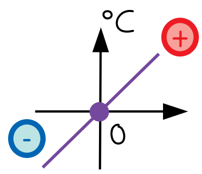
$x=0$ (déjà résolue sans la toucher)

ajout final

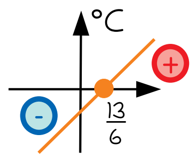
ZOOM

x	$-\infty$		0	2		$\frac{13}{6}$ ☆		10	$+\infty$
x		-	0		+		+		
$6x-13$		-			-	0	+		
$h(x)$		+	0		-	‖	+		

car m > 0 (m = 1) :



car m > 0 (m = 6) :



☆ On s'assure que $\frac{13}{6}$ est bien supérieur à 2 en donnant sa valeur approchée (≈ 2,17).

Ce qui donne si on reconstruit le tableau demandé (le zoom) :

x	
$h(x)$	

Remarque : On met une double barre sous le $\frac{13}{6}$ et dans la ligne de $h(x)$ car c'est une valeur interdite. En effet : $h(\frac{13}{6})=\frac{13/6}{6\times(13/6)-13}$ renvoie bien « ERROR » à la calculatrice.